

LOGARITMI ȘI NUMĂRUL e

O privire exponențială asupra realității

DIEGO ALONSO ROA

Traducere de Antonia Călin

CUPRINS

Capitolul 0

John Napier și logaritmi	7
Intră în scenă John Napier	11
<i>Arithmetica integra de Michael Stifel: o lucrare precursoră a logaritmilor lui Napier</i>	12
<i>Prosthaphaeresis</i>	13
<i>Concepția cinematică a logaritmilor</i>	14
<i>Logaritmi după Briggs</i>	18
<i>Fracțiile continue ale lui Cataldi</i>	19
<i>Regulile de calcul ale lui Napier și metoda lui Briggs</i>	20

Capitolul 1

Logaritmi, un puternic instrument de calcul	25
Istoria riglelor de calcul	29
<i>Napier, inventatorul</i>	33
Cum calculăm cu logaritmi?	35
Briggs ia locul lui Napier	37
Rigle și scări logaritmice	38
<i>Existența și unicitatea funcției logaritmice</i>	42
Caracteristici matematice ale logaritmilor	43
<i>Proprietățile logaritmilor</i>	44
<i>Binomul lui Newton</i>	45
Numărăm logaritmice prin natură?	
O reflecție antropologică	46
Învățarea numerelor în copilărie	52
Percepția logaritmice. Legea Weber-Fechner	55
Unu ne invadează! Legea lui Benford	58
<i>Legi de autosimilaritate</i>	62

Fiecare set de date este un set Benford?	63
<i>Benford și dezintegrarea nucleară</i>	65
Căutând numere prime. Logaritmul integral	68
<i>Evitând ipoteza Riemann</i>	69
<i>Teorema lui Cebîșev a numerelor prime</i>	71
Criptografia și logaritmii discreți	71
Dezordonând elemente cu un „pământ logaritmico”.	
Entropia	72
<i>Definiția generalizată a entropiei</i>	74
Degradarea logaritmică a informației	77
<i>Definiția autoinformației</i>	78
Capitolul 2	
Numărul e	83
Tur istoric	84
Interpretări geometrice	88
<i>Păianjenul Epeira și pânda sa în spirală logaritmică</i>	90
Construind poduri cu numărul e: catenara	92
<i>Soluție = catenară</i>	93
<i>Gaudí și catenarele</i>	94
Omul mediu: numărul e, actor principal	
în statistică	95
<i>Distribuția binomială</i>	96
<i>Coeficienții binomiali. Triunghiul lui Pascal</i>	97
Cifre cunoscute	102
Amestecând cărți sau cum să îți alegi perechea	104
<i>Principiul porumbeilor</i>	108
Anexe. Demonstrații și aplicații matematice	119
Bibliografie recomandată	143

Capitolul 0

John Napier și logaritmi

Mereu, când poți, numără.

(Sir Francis Galton, 1822–1911)

Cu excepția apariției perspectivei, care este transferată din sfera artistică în domeniul matematic, și a unor schițe ale viitorului calcul infinitesimal, se poate spune că în matematica secolului al XVI-lea preocuparea principală era de natură instrumentală, în sensul perfecționării metodelor și resurselor dezvoltate în aritmetică, algebră și trigonometrie încă din secolul al XIII-lea. O altă caracteristică a matematicii renascentiste poate fi observată în influența pe care factorii intrinseci au exercitat-o asupra dezvoltării ei, precum, de exemplu, exigențele artiștilor care au dat naștere perspectivei – care, ulterior, a devenit o nouă ramură a geometriei – nevoile comercianților, contabililor și ale informaticienilor care au declanșat inovații aritmetice, cerințele astronomilor care au condus la perfecționarea trigonometriei și astfel am putea continua să ne plimbăm prin istorie.

Singurul domeniu care a rămas în cadrul aspectului său tehnic speculativ a fost algebra, deși în dezvoltarea sa nu încetează să se remarce un anumit produs de singularitate al mediului vremii: interesul pe care îl trezește formularea de întrebări dificile, precum și atracția pe care o mai au jocurile și provocările. Toate acestea au dat naturii



Figura 1. O figură celebră din enciclopedia *Margarita Philosophica* de Gregor Reisch (1467–1525), publicată la începutul secolului al XVI-lea, o arată pe „Doamna Aritmetică” prezidând un fel de turneu între un algoritm, care funcționează în noua manieră, și un abac: expresiile de pe fețele celor doi rivali dezvăluie clar câștigătorul.

ludice latente a matematicii propriile sale caracteristici. În niciun alt moment al istoriei sale matematica nu a trăit episoade asemănătoare cu cele care au avut loc printre savanții italieni în prima jumătate a secolului al XVI-lea; niciodată nu s-a trezit un interes public asemănător cu cel trezit atunci de întrebări atât de nevinovate, cum ar fi aflarea numărului care, adăugat la rădăcina sa cubică, dă 14, mai ales când răspunsul este o combinație complicată de rădăcini pătrate și de cuburi suprapuse.

În domeniul aritmeticii secolului al XVI-lea, asistăm la eliminarea treptată a calculului cu abacul și înlocuirea lui cu regulile obișnuite de calcul cu cifre arabe. În secolul al XV-lea, abacul dispăruse deja din Spania și din Italia și, încetul cu încetul, același lucru s-a întâmplat în Franța, Germania și Anglia.

Ca inovații aritmetice importante ale secolului al XVI-lea, trebuie considerate numerele zecimale, logaritmi (unul dintre subiectele care vor fi dezvoltate în profunzime pe parcursul acestei cărți) și fracțiile continue (strâns legate de numărul e , celălalt subiect important abordat în acest volum).

Apariția atât de târzie a numerelor zecimale este ciudată, considerând că introducerea definitivă a sistemului de numerație zecimal occidental datează din secolul al XIII-lea și că această introducere ar părea că o poartă și pe cea a numerelor zecimale ca parte integrantă a sistemului. Nu a fost însă așa; și la începuturile sale nu s-a observat că avantajele oferite de sistem prin reprezentarea numerelor ca sumă a multiplilor puterilor lui 10 în sens crescător erau oferite și în sensul descrescător al acelor puteri. Cerințele puneau probleme trigonometrice și erau necesare tabele trigonometrice precise. În acest context, germanul **Johannes Müller Regiomontano** (1436–1476) a publicat în secolul al XV-lea tabele cu sinusul unui unghi la intervale de $1'$ și tabele cu tangenta la intervale de 1° . Dar, odată cunoscute rapoartele trigonometrice, au apărut calcule complicate cu acestea. Logaritmi au fost inventați pentru a simplifica, în special pentru astronomi, înmulțirile, împărțirile și radicalii dificili ai numerelor cu multe cifre.

Deși se evidențiază anumite încercări anterioare de adoptare a unui sistem de fracții zecimale, prima tratare sistematică a acestora se datorează uneia dintre figurile științifice ale secolului: belgianul **Simon Stevin** (1548–1620), care a fost și funcționar public, și om de știință, printre altele. Prima sa publicație, în 1584, a constatat în tabele pentru calcularea dobânzii compuse, în timp ce un an mai târziu a publicat un scurt pamflet despre numerele zecimale – în flamandă, *De Thiende* și în franceză, *La Disme*, titluri care fac aluzie la „al zecelea”; de fapt, cartea se ocupă de aritmetica zecimală.

La Disme cuprinde două părți. În prima, definește numerele zecimale; în a doua, enunță regulile de efectuare a operațiilor elementare cu numerele zecimale.

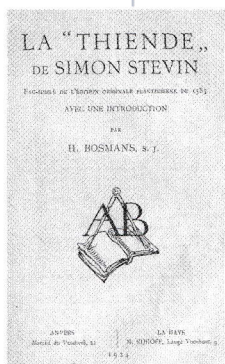


Figura 2. Ediția din 1924 a *La Thiende* a lui Stevin. Subtitlul indică faptul că tratatul învață „cum toate calculele care sunt prezentate în afaceri pot fi făcute numai cu numere întregi, fără ajutorul fracțiilor”. În dreapta, portretul lui Simon Stevin, cunoscut și sub numele de Stevinus.

Apoi descrie aplicații în astronomie, agricultură și în comerț, terminând prin a exprima dorința ca guvernele să extindă diviziunea zecimală la sistemul de monede, greutate și de măsuri, avansând astfel câteva secole până la declararea adoptării universale a sistemului metric (zecimal). Ideea lui Stevin, scrierea după fiecare zecimală a exponentului puterii lui 10 a numitorului cuprins într-un cerc mic nu a funcționat, dar câțiva ani mai târziu și-a dat seama că pentru a reprezenta numerele zecimale era suficient să separe, într-un fel, partea întreagă de partea fracționară. Lăsând deoparte alte propuneri în acest sens, să ne amintim că folosirea virgulei în acest domeniu se datorează astronomului **Giovanni Antonio Magini** (1555–1617), în timp ce cea a punctului, cu același scop, apare în lucrarea *Constructio* a lui **John Napier** (1550–1617) din 1619 (lui Napier îi vom dedica un amplu spațiu în această carte pentru enormă sa contribuție la logaritmi, a căror invenție avea ca scop simplificarea calculelor greoaie din astronomie). Conceptul – nu

denumirea – de logaritm, ca operație inversă a ridicării la putere, de corespondență între termenii unei progresii aritmetice și termenii uneia geometrice, apare în *Arithmetica integra* a matematicianului german **Michael Stifel** (1487–1567), publicată în 1544; conform titlului, lucrarea trebuia să curpindă tot ceea ce la vremea aceea era înțeles ca aritmetică: teoria numerelor, proporțiile și algebra. Este posibil ca aceste idei să fi influențat matematicienii care încercau să simplifice operațiile aritmetice, ale căror proceduri includeau *prosthaphaeresis*, un neologism care denumea transformarea unei înmulțiri în adunări, folosit în principal de astronomi prin relații între funcții circulare (vezi caseta „Prosthaphaeresis” la pag. 13). Dar logaritmiile vor fi cei care vor rezolva pe deplin întrebarea și tocmai acele cerințe practice au făcut ca logaritmul, operația inversă ridicării la putere, să apară înainte de constituirea operației directe.

Intră în scenă John Napier

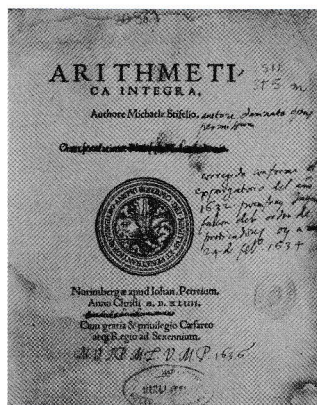
Faptul că cerința practică a calculelor dificile din secolul al XVI-lea era în aer este dovedit de faptul că logaritmiile se nasc prin munca a doi autori diferiți care au lucrat independent: scoțianul Napier și elvețianul **Joost Bürgi** (1552–1632); aceștia și-au publicat tabelele la începutul secolului al XVII-lea, la interval de câțiva ani unul de celălalt; lucrarea *Mirifici Logarithmorum Canonis* a lui Napier datează din 1614; *Progress-Tabulens* ale lui Bürgi datează din 1620. Tabelul logaritmilor din cartea lui Napier nu este de logaritmi de numere, ci de logaritmi de sinusuri, în care, pentru a evita numerele negative, a folosit ca raport al progresiei geometrice un număr apropiat de unitate, dar mai mic decât 1. În plus,



Figura 3. John Napier.

ARITHMETICA INTEGRA DE MICHAEL STIFEL: O LUCRARE PRECURSOARE A LOGARITMILOR LUI NAPIER

Figura 4. Coperta
unui exemplar
Arithmetica integra
de Michael Stifel.



În această carte apare pentru prima dată relația recurentă dintre termenii „triunghiului aritmetic”, pe care Stifel o extinde la ordinul 17. Tot în această lucrare, spune autorul, tratând teoria proporțiilor, că $729/64$ poate fi „împărțit” de șase ori la $3/2$ sau că $2187/128$ poate fi „împărțit” de două ori, cu un rest de $1/3$, cu $27/8$, expresii care în limba modernă ar fi traduse ca spunând că 6 este logaritmul în baza $3/2$ a numărului $729/64$ sau $7/3$ este logaritmul în baza $27/8$ a numărului $2187/128$. Mai mult, în comparația dintre termenii unei progresii aritmetice de rație 1, pe care el îi numește „numere”, cu cei ai unei progresii geometrice de rație 2, pe care îi numește „exponenti” (comparație care are un precursor îndepărtat la Arhimede și unul mai apropiat la Chuquet), se extind din ambele sensuri și indică, în special, corespondența care există între operațiile care se efectuează cu termenii ambelor serii. Astfel, spune el, adunării, scăderii, înmulțirii și împărțirii cu un număr a elementelor progresiei aritmetice îi corespund, respectiv, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere și extragerea rădăcinilor elementelor seriei geometrice.

PROSTHAPHAERESIS

Cea mai veche *prosthaphaeresis* – fără această denumire sau același scop – este identitatea clasică, cu reminiscențe babiloniene și diofantine, care exprimă produsul prin diferența a două pătrate și care, în vremurile recente (secolul trecut și chiar începutul actualului), a fost folosit în „tabelele cu sferturi de pătrat” în formula:

$$x \cdot y = E \left[\frac{1}{4}(x+y)^2 \right] - E \left[\frac{1}{4}(x-y)^2 \right],$$

cu introducerea funcției E (partea întreagă a unui număr), care salvează scrierea în tabelul părții fracționale. Cu acest tabel, produsul se obține prin adăugarea unei sume, două diferențe și două citiri în tabel. Ca *prosthaphaeresis* renescentistă vom cita exemplul oferit de astronomul Tycho Brahe care, pentru a calcula valoarea lui a în formula de trigonometrie sferică:

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(A),$$

folosește un unghil auxiliar h precum:

$$\cos h = \frac{1}{2} [\cos(b - c) - \cos(b + c)],$$

prin care poate obține valoarea lui $\cos(a)$ de forma:

$$\cos a = \frac{1}{2} [\cos(b + c) + \cos(b - c)] + \frac{1}{2} [\cos(A + h) + \cos(A - h)]$$

prin sume și diferențe. Dar este clar că funcția logaritmică, prin intermediul identității simple $x \cdot y = e^{\ln x + \ln y}$, oferă cea mai potrivită soluție, deși nașterea logaritmilor într-un moment în care funcția exponențială nu era cunoscută încă nu a fost rezultatul unor speculații teoretice, ci al intuițiilor și al cerințelor practice.

CONCEPȚIA CINEMATICĂ A LOGARITMILOR

Napier presupune două mobile M și M' care se mișcă, respectiv, pe un segment $AB = a$ și o semidreaptă de origine A' ; ambele pleacă simultan din A , respectiv din A' , cu viteză inițială egală v , dar, în timp ce mișcarea lui M' este uniformă, cea a lui M este astfel încât viteza sa este variabilă și proporțională cu MB ; în aceste condiții Napier spune că $A'M'$ este logaritmul lui MB .

Dacă traducem acea mișcare cu notațiile actuale vom avea: notând $x = MB$, $y = A'M'$ și v este viteza inițială, $a \, dx = -v \cdot x \, dt = -x \, dy$. Integrând acea ecuație și ținând cont de condiția inițială, se obține că $y = a \cdot l \cdot (x/a) = a \cdot l_1 \cdot (x/a)$, unde cu l se indică simbolul logaritmului în baza e și cu l_1 simbolul logaritmului în baza $1/e$. Considerând că $y \cdot a = a \cdot \sin x$ am avea ca rezultat la final că logaritmi Napier, în concepția lor cinematică, ar fi proporționali cu logaritmi naturali ai sinusurilor, cu semn opus, sau cu logaritmi în baza $1/e$ din sinusurile unghiurilor.

și acesta este un mare avans teoretic, el introducând logaritmi prin intermediul unei concepții cinemate (vezi caseta „Concepția cinematică a logaritmulor” la paginile 14 și 15), admițând implicit proprietatea funcției logaritmice de a fi o funcție continuă, caracteristică ce nu este observată atunci când logaritmi sunt considerați ca termeni ai unei secvențe discrete, cum este progresia aritmetică. Desigur, pentru construirea eficientă a logaritmulor săi, Napier a trebuit să recurgă la ambele progresii. Numele de „logaritm” (de la *logos*, „raport”, și *arithmo*, „număr”) se datorează și acestui matematician din mai multe motive, deoarece în cazul în care logaritm este un număr întreg, acesta este numărul de factori care sunt luați din raportul dat (baza) pentru a obține antilogaritm.

Desigur, aceștia nu sunt logaritmi tabelului lui Napier, deoarece, neavând resursele calculului infinitesimal, nu și-a putut susține concepția cinematică despre logaritmi ca funcție continuă. Pentru a-și construi tabelul, a trebuit să recurgă la corespondența dintre cele două progresii și să transforme mișcarea lor într-o succesiune discontinuă de etape, prin care a arătat că valorile corespunzătoare ale lui x au răspuns termenilor unei progresii geometrice descrescătoare cu un raport mai mic decât unitatea, deși foarte aproape de aceasta, deoarece este nevoie de acel raport egal cu $(1 - a^{-1})$, cu $a = 10^7$.

Folosind tabele auxiliare, el construiește o progresie geometrică de 3600 de termeni cu acel raport care pleacă de la $10^7 = a \sin(90^\circ)$ până la $1/2 \cdot 10^7 = a \sin(30^\circ)$, ceea ce face ca logaritmi sinusurilor unghiurilor dintre 90° și 30° să corespundă de la minut la minut. Pentru valori sub 30° utilizează valorile calculate pentru $\sin(2\alpha)$ și $\sin(90^\circ - \alpha)$ pentru a obține logaritmul lui $\sin \alpha$ prin intermediul expresiei $2\sin(\alpha) \cos(90^\circ - \alpha) = \sin(2\alpha)$, cu ceea ce poate oferi tabelul logaritmilor săi pentru cele trei funcții circulare, sinus, cosinus și tangentă, pe care l-a publicat în 1614 (așa cum vedem în aceste pagini, când amintim detalii din viața lui Napier pentru contribuția sa la dezvoltarea și utilizarea logaritmilor).

Napier și-a publicat tabelul în 1614 fără explicația construcției sale, care apare postum în 1619.

Preocuparea lui Napier de a facilita calculele numerice s-a manifestat și prin inventarea unor dispozitive elementare, numite „oasele lui Napier”. Chiar fără a se lua în considerare cea mai mare invenție (logaritmi), îi datorăm contribuțiile la trigonometria sferică, unde, cu numele său, este cunoscută o „regulă” mnemonică ce amintește relațiile dintre elementele triunghiurilor sferice dreptunghiulare și unele „analogii” (proporții) pentru triunghiuri sferice oblice. Dintre acele analogii, Napier a dat două; celelalte două i le datorăm lui **Henry Briggs** (1561–1630), un profesor londonez care a răspândit și a perfecționat în mare parte logaritmi lui

Napier. Într-adevăr, logaritmi zecimali actuali au apărut dintr-o conversație între Napier și Briggs.

Deși de natură anecdotică, această primă conversație între John Napier și Henry Briggs nu este lipsit de interes. Vă oferim mai jos un fragment al întâlnirii, povestit de un contemporan, deși traducerea își pierde din savoarea englezei vechi. Acest autor povestește că Briggs

a luat legătura cu John Marr, care avea să plece în Scoția înaintea domnului Briggs, pentru că acolo ar fi trebuit să se întâlnească acești doi oameni atât de culți:

Domnul Briggs a precizat cu exactitate ziua în care se vor întâlni în Scoția, Edinburgh, dar a eșuat în scopul său, astfel încât lordul Napier s-a îndoit că acesta va mai veni. S-a întâmplat într-o zi că John Marr și Lord Napier vorbeau despre domnul Briggs. „Ah! Ah, John! – spuse Merchiston – domnul Briggs nu va mai veni.” Chiar în acel moment cineva a bătut la ușa de la intrare. John Marr a deschis în grabă și, cu mare bucurie, a constatat că era domnul Briggs. El l-a condus apoi înăuntru și aproape un sfert de ceas cei doi s-au privit cu admirație fără să spună un cuvânt; în cele din urmă, domnul Briggs a început: „Doamne, am întreprins această lungă călătorie ca să te văd și să știu prin ce particularități de cunoaștere și inteligență ai ajuns să te gândești la acel excelent ajutor pentru astronomi, adică logaritmi”.

Când Briggs a sugerat oportunitatea adaptării logaritmilor la sistemul de numerație și de a lua baza $1/10$ pentru aceasta, Napier a răspuns spunând că s-a gândit deja la această utilitate, dar l-a sfătuit să ia baza 10. Napier însuși sugerase la un moment dat un tabel bazat pe $\log 1 = 0$ și $\log 10 = 10^{10}$ pentru a evita fracțiile, dar în final cei doi bărbați au ajuns la concluzia că cel mai convenabil ar fi ca logaritmul lui 1 să fie 0 și logaritmul lui 10 să fie 1.

Cu toate acestea, Napier era deja bătrân și fără energia necesară pentru a pune aceste idei în practică și a murit în 1617, același an în